

Model Mangsa-Pemangsa dengan Dua Pemangsa dan Satu Mangsa di Lingkungan Beracun

Irham Taufiq¹, Imam Solekhudin², Sumardi³

¹Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

²Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada

³Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada

irham.taufiq@gmail.com

Abstrak— Di dalam penelitian ini, akan dibahas model matematika yang menunjukkan interaksi antara satu mangsa dan dua pemangsa di lingkungan beracun. Interaksi antara mangsa dan pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Pertumbuhan mangsa dan pemangsa menggunakan fungsi logistik. Kestabilan lokal masing-masing titik ekuilibrium dianalisis. Untuk memudahkan interpretasi antara mangsa dan dua pemangsa di lingkungan beracun dilakukan simulasi numerik yang ditunjukkan dengan perubahan efektifitas racun dan nilai dari tingkat efisiensi perubahan konsumsi mangsa terhadap kelahiran pemangsa pertama dan kedua.

Kata kunci: *Lingkungan beracun, model mangsa-pemangsa, simulasi numerik, titik ekuilibrium.*

I. PENDAHULUAN

Suatu lingkungan beracun merupakan masalah yang serius karena dapat mengancam makhluk hidup di sekitarnya. Sejumlah racun dapat mengkontaminasi suatu ekosistem. Salah satu contohnya adalah penggunaan pestisida secara instan dan teratur pada bidang pertanian. Pestisida dapat membunuh hama dengan cepat namun hasil pertanian tersebut membahayakan kesehatan bagi hewan-hewan bahkan manusia.

Hubungan antara mangsa dan pemangsa dapat dimodelkan secara matematis menjadi model mangsa-pemangsa. Menurut [2], model mangsa pemangsa yang paling sederhana adalah model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra hanya melibatkan satu pemangsa dan satu mangsa saja sedangkan pada beberapa ekosistem terdapat predasi yang melibatkan dua pemangsa dengan mangsa yang sama. Contoh predasi semacam ini adalah wereng batang padi coklat (*Nilaparvata lugens Stal.*) yang dimangsa oleh pemangsa alaminya, seperti kumbang *Menochilus sexmaculatus* dan kepik mirid (*Cyrtorhinus lividipennis*). Model Lotka-Volterra dapat dikembangkan untuk memodelkan interaksi antara dua pemangsa dan satu mangsa. Salah satunya adalah [1] telah menurunkan model dua pemangsa dan satu mangsa dengan asumsi pertumbuhan mangsa dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik dimana terjadi kompetisi antara kedua predator tersebut. Di lain pihak, [3] juga telah menurunkan model mangsa pemangsa dengan mangsa terinfeksi di lingkungan beracun dengan asumsi pertumbuhan mangsa dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik. Oleh karena itu, pada penelitian ini Penulis tertarik untuk mengkaji model mangsa pemangsa yang melibatkan dua pemangsa yang saling berkompetisi dan satu mangsa dengan asumsi pertumbuhan mangsa dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik di lingkungan beracun.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Pembentukan Model

Berikut akan dibahas mengenai pembentukan model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa. Jumlah individu pada populasi mangsa pada saat waktu t dinotasikan dengan $x(t)$, jumlah individu pada populasi pemangsa pertama pada saat waktu t dinotasikan dengan $y(t)$, jumlah individu pada populasi pemangsa kedua pada saat waktu t dinotasikan dengan $z(t)$, dan konsentrasi racun pada organisme pada saat waktu t dinyatakan oleh $s(t)$. Selain itu, terdapat juga konsentrasi racun pada lingkungan yang dinyatakan oleh $v(t)$.

Kemudian diasumsikan bahwa populasi pemangsa dan populasi mangsa bersifat tertutup, artinya tidak ada pemangsa dan mangsa yang melakukan migrasi. Model mangsa pemangsa yang dikaji terdiri dari dua pemangsa dan satu mangsa. Terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa. Antara pemangsa yang satu dengan yang lainnya saling berkompetisi artinya terjadi persaingan antara kedua pemangsa

untuk mendapatkan mangsa tersebut. Pertumbuhan mangsa dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik.

Selanjutnya, diasumsikan bahwa apabila tidak ada interaksi antara pemangsa dan mangsa, maka pertumbuhan mangsa mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k dan tingkat pertumbuhan intrinsik r akibatnya mangsa akan bertambah dengan laju $rx(1-x/k)$. Pemangsaan pemangsa pada kelas mangsa menggunakan respon Holling tipe II yaitu $g(x) = \alpha x / (1 + h\alpha x)$.

Ketika terdapat interaksi antara pemangsa pertama dan mangsa sebesar $g_1(x)$, pertumbuhan mangsa akan berkurang sebesar $g_1(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara fungsi respon Holling tipe II dengan populasi pemangsa, dimana $g_1(x) = \alpha x / (1 + h_1\alpha x)$ dengan α adalah tingkat pencarian dan penangkapan mangsa oleh pemangsa pertama dan h_1 adalah tingkat penanganan dan pencernaan pemangsa pertama, $g_1(x)y = \alpha xy / (1 + h_1\alpha x)$.

Ketika terdapat interaksi antara pemangsa kedua dan mangsa sebesar $g_2(x)$, pertumbuhan mangsa akan berkurang sebesar $g_2(x)z$ yang merupakan laju perkalian antara fungsi respon Holling tipe II dengan pemangsa z , diperoleh $g_2(x) = \beta x / (1 + h_2\beta x)$ dengan β adalah tingkat pencarian dan penangkapan mangsa oleh pemangsa kedua dan h_2 adalah tingkat penanganan dan pencernaan pemangsa kedua, sehingga $g_2(x)z = \beta xz / (1 + h_2\beta x)$.

Adanya kematian alami pada populasi mangsa dengan laju m mengakibatkan populasi mangsa akan berkurang sebesar mx . Populasi mangsa dan kedua pemangsa dapat menyerap racun dari lingkungan karena adanya laju kontak antar keduanya. Kemudian, adanya racun tersebut mengakibatkan penurunan populasi mangsa dengan laju ρ_1 . Akibatnya populasi mangsa akan berkurang sebesar $\rho_1 xs$. Dengan demikian, laju perubahan jumlah mangsa terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1\alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2\beta x} - \rho_1 xs - mx \quad (1)$$

Kemudian, apabila tidak ada mangsa maka terjadi penurunan populasi pemangsa pertama dengan tingkat kematian alami sebesar u tetapi apabila terdapat mangsa maka terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa pertama, pertumbuhan pemangsa mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k_y dengan $k_y = a_1x$ sebanding dengan tidak tersedianya sejumlah mangsa dan tingkat pertumbuhan respon numerik R_1 sehingga pemangsa akan bertambah dengan laju $R_1y(1-y/k_y)$ dengan $R_1 = \alpha x e_1 / (1 + h_1\alpha x)$ dengan e_1 menyatakan pengubahan konsumsi mangsa ke dalam kelahiran pemangsa pertama.

Selain itu, Terjadi interaksi antara pemangsa yang satu dengan lainnya. Tingkat kompetisi dari pemangsa pertama pada pemangsa kedua sebesar c_1 . Akibatnya, populasi pemangsa pertama akan berkurang sebesar $c_1 yz$. Adanya racun tersebut mengakibatkan penurunan populasi pemangsa pertama dengan laju ρ_2 . Akibatnya populasi pemangsa pertama akan berkurang sebesar $\rho_2 ys$. Dengan demikian, laju perubahan jumlah pemangsa pertama terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = -uy + R_1y \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) - c_1 yz - \rho_2 ys \quad (2)$$

Selanjutnya, apabila tidak ada mangsa maka terjadi penurunan populasi pemangsa kedua dengan tingkat kematian alami sebesar w tetapi apabila terdapat mangsa maka terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa kedua, pertumbuhan pemangsa mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k_z dengan $k_z = a_2x$ sebanding dengan tidak tersedianya sejumlah mangsa dan tingkat pertumbuhan respon numerik R_2 sehingga pemangsa akan bertambah dengan laju $R_2z(1-z/k_z)$ dengan $R_2 = \beta x e_2 / (1 + h_2\beta x)$ dan e_2 menyatakan peubahan konsumsi mangsa ke dalam kelahiran pemangsa kedua.

Selain itu, Terjadi interaksi antara pemangsa yang satu dengan lainnya. Tingkat kompetisi dari pemangsa kedua pada pemangsa pertama sebesar c_2 . Akibatnya, populasi pemangsa kedua akan berkurang sebesar $c_2 yz$. Adanya racun tersebut mengakibatkan penurunan populasi pemangsa kedua dengan laju ρ_3 . Akibatnya populasi pemangsa kedua akan berkurang sebesar $\rho_3 zs$. Dengan demikian, laju perubahan jumlah pemangsa kedua terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dz}{dt} = -wz + R_2 z \left(1 - \frac{z}{k_z}\right) - c_2 yz - \rho_3 zs \quad (3)$$

Kenaikan atau pemasukan konsentrasi racun pada lingkungan bernilai konstan, yaitu dengan laju sebesar q . Penurunan konsentrasi racun pada lingkungan yang diserap oleh populasi mangsa dan kedua pemangsa sebesar γ , dan konsentrasi racun yang hilang secara alami sebesar μ . Akibatnya laju perubahan konsentrasi racun pada lingkungan adalah

$$\frac{dv}{dt} = q - (\gamma + \mu)v \quad (4)$$

Konsentrasi racun yang diserap lingkungan mengakibatkan konsentrasi racun yang diserap mangsa dan kedua pemangsa meningkat. Kemudian adanya penambahan racun dari proses memakan makanan oleh organisme bernilai konstan, yaitu dengan laju sebesar b . Laju hilangnya konsentrasi racun secara alami yaitu sebesar θ . Akibatnya laju perubahan konsentrasi racun pada mangsa dan kedua pemangsa adalah

$$\frac{ds}{dt} = b + \gamma v - \theta s \quad (5)$$

Berdasarkan (1), (2), (3), (4), dan (5) diperoleh model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa di lingkungan beracun yang berupa sistem persamaan diferensial non linier.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x} - \rho_1 xs - mx \\ \frac{dy}{dt} &= -uy + R_1 y \left(1 - \frac{y}{k_y}\right) - c_1 yz - \rho_2 ys \\ \frac{dz}{dt} &= -wz + R_2 z \left(1 - \frac{z}{k_z}\right) - c_2 yz - \rho_3 zs \\ \frac{dv}{dt} &= q - (\gamma + \mu)v \\ \frac{ds}{dt} &= b + \gamma v - \theta s \end{aligned} \quad (6)$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $v(0) = v_0$, dan $s(0) = s_0$.

Jika $R_1 = \alpha x e_1 / (1 + h_1 \alpha x)$, $R_2 = \beta x e_2 / (1 + h_2 \beta x)$, $k_y = a_1 x$, dan $k_z = a_2 x$ disubstitusikan ke (6), maka (6) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x} - \rho_1 xs - mx \\ \frac{dy}{dt} &= -uy + \frac{\alpha x e_1 y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\alpha x e_1 y^2}{(1 + h_1 \alpha x) a_1 x} - c_1 yz - \rho_2 ys \\ \frac{dz}{dt} &= -wz + \frac{\beta x e_2 z}{1 + h_2 \beta x} - \frac{\beta x e_2 z^2}{(1 + h_2 \beta x) a_2 x} - c_2 yz - \rho_3 zs \\ \frac{dv}{dt} &= q - (\gamma + \mu)v \\ \frac{ds}{dt} &= b + \gamma v - \theta s \end{aligned} \quad (7)$$

Sistem (7) dapat ditulis dalam bentuk tak berdimensi untuk mereduksi banyaknya parameter. Hal ini mengakibatkan analisis matematikanya tidak rumit. Selanjutnya didefinisikan:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= rt, \bar{x} = \frac{x}{k}, \bar{y} = \frac{y}{a_1 k}, \bar{z} = \frac{z}{a_2 k}, \bar{\alpha} = \frac{ka_1 \alpha}{r}, \bar{\beta} = \frac{ka_2 \beta}{r}, \bar{e}_1 = \frac{e_1}{a_1}, \\
\bar{e}_2 &= \frac{e_2}{a_2}, \bar{u} = \frac{u}{r}, \bar{w} = \frac{w}{r}, \bar{h}_1 = \frac{rh_1}{a_1}, \bar{h}_2 = \frac{rh_2}{a_2}, \bar{c}_1 = \frac{a_2 kc_1}{r}, \bar{c}_2 = \frac{a_1 kc_2}{r}, \\
\bar{\rho}_1 &= \frac{n\rho_1}{r}, \bar{\rho}_2 = \frac{n\rho_2}{r}, \bar{\rho}_3 = \frac{n\rho_3}{r}, \bar{s} = \frac{s}{n}, \bar{m} = \frac{m}{r}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{r}, \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{r}, \\
\bar{v} &= \frac{v}{n}, \bar{q} = \frac{q}{nr}, \bar{b} = \frac{b}{nr}, \bar{\theta} = \frac{\theta}{r},
\end{aligned} \tag{8}$$

Kemudian persamaan-persamaan pada (8) disubstitusikan ke (7). Kemudian dengan menghapus bar pada semua parameter dan menyederhanakannya maka (7) menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1+h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1+h_2 \beta x} - \rho_1 xs - mx = xL(x, y, z) \\
\frac{dy}{dt} &= -uy + \frac{e_1 \alpha xy}{1+h_1 \alpha x} - \frac{e_1 \alpha y^2}{1+h_1 \alpha x} - c_1 yz - \rho_2 ys = yM_1(x, y, z) \\
\frac{dz}{dt} &= -wz + \frac{e_2 \beta xz}{1+h_2 \beta x} - \frac{e_2 \beta z^2}{1+h_2 \beta x} - c_2 yz - \rho_3 zs = zM_2(x, y, z) \\
\frac{dv}{dt} &= q - (\gamma + \mu)v \\
\frac{ds}{dt} &= b + \gamma v - \theta s
\end{aligned} \tag{9}$$

dengan fungsi $L, M_i; i=1,2$ adalah fungsi kontinu *smooth* pada

$$\mathbb{R}_+^5 = \{(x, y, z, v, s) \in \mathbb{R}^5 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, v \geq 0, s \geq 0\}.$$

Teorema 1. Solusi dari (9) yang berada di \mathbb{R}_+^5 untuk $t \geq 0$ adalah terbatas.

Bukti: Persamaan pertama dari (9) adalah

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1+h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1+h_2 \beta x} - \rho_1 xs - mx \tag{10}$$

karena $\alpha xy / (1+h_1 \alpha x), \beta xz / (1+h_2 \beta x), \rho_1 xs, mx \geq 0$, maka (10) menjadi $\frac{dx}{dt} \leq x(1-x)$.

Selanjutnya, jika $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$, maka memiliki solusi $x = \frac{1}{1+be^{-t}}$.

Akibatnya $x \leq 1, \forall t > 0$.

Selain itu, solusi y, z, v , dan s juga terbatas. Karena keterbatasannya mengikuti keterbatasan x .

B. Titik Ekuilibrium Model dan Kestabilannya

Jika $\frac{dv}{dt} = 0$, maka

$$v = \frac{q}{(\gamma + \mu)} \tag{11}$$

Jika $\frac{ds}{dt} = 0$, maka

$$s = \frac{b + \gamma v}{\theta} \tag{12}$$

Kemudian, (11) disubstitusikan ke (12), yaitu

$$s = \frac{b + \gamma \left(\frac{q}{(\gamma + \mu)} \right)}{\theta} \tag{13}$$

Jika $\frac{dx}{dt} = 0$, maka

$$x = 0 \quad (14)$$

atau

$$1 - x - \frac{\alpha y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta z}{1 + h_2 \beta x} - \rho_1 s - m = 0 \quad (15)$$

Kemudian, jika $\frac{dy}{dt} = 0$, maka

$$y = 0 \quad (16)$$

atau

$$-u + \frac{e_1 \alpha x}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{e_1 \alpha y}{1 + h_1 \alpha x} - c_1 z - \rho_2 s = 0 \quad (17)$$

Kemudian, jika $\frac{dz}{dt} = 0$, maka

$$z = 0 \quad (18)$$

atau

$$-w + \frac{e_2 \beta x}{1 + h_2 \beta x} - \frac{e_2 \beta z}{1 + h_2 \beta x} - c_2 y - \rho_3 s = 0 \quad (19)$$

Berdasarkan uraian di atas, dari (11), (13), (14), (16) dan (18) diperoleh titik ekuilibrium yaitu $TE_1 = (0, 0, 0, v, s)$. Kemudian dari (11), (13), (15), (16), dan (18) diperoleh titik ekuilibrium $TE_2 = (1 - m - \rho_1 s, 0, 0, v, s)$. Selanjutnya, dari (11), (13), (15), (17) dan (18) diperoleh titik ekuilibrium

$$TE_3 = \left(\bar{x}, \frac{(1 - \bar{x} - \rho_1 s - m)(1 + h_1 \alpha \bar{x})}{\alpha}, 0, v, s \right)$$

dengan

$$\bar{x} = \frac{-(e_1 + e_1 \alpha - (e_1(1 - m) + u + (\rho_2 - e_1 \rho_1)s)h_1 \alpha) + \sqrt{[e_1 + e_1 \alpha - (e_1(1 - m) + u + (\rho_2 - e_1 \rho_1)s)h_1 \alpha]^2 + F}}{2e_1 h_1 \alpha}$$

dan $F = 4e_1 h_1 \alpha (e_1(1 - m) + u + (\rho_2 - e_1 \rho_1)s)$

Selanjutnya, dari (11), (13), (15), (16) dan (19) diperoleh titik ekuilibrium

$$TE_4 = \left(\hat{x}, 0, \frac{(1 - \hat{x} - \rho_1 s - m)(1 + h_2 \beta \hat{x})}{\beta}, v, s \right)$$

dengan

$$\hat{x} = \frac{-(e_2 + e_2 \beta - (e_2(1 - m) + w + (\rho_3 - \rho_1 e_2)s)h_2 \beta) + \sqrt{(e_2 + e_2 \beta - (e_2(1 - m) + w + (\rho_3 - \rho_1 e_2)s)h_2 \beta)^2 + G}}{2e_2 h_2 \beta}$$

dan $G = 4e_2 h_2 \beta (e_2(1 - m) + w + (\rho_3 - \rho_1 e_2)s)$

Selanjutnya, dari (11), (13), (15), (17) dan (19) diperoleh titik ekuilibrium $TE_5 = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, v, s)$, dengan

$$\tilde{y} = \frac{(e_2(1 - m) + w + (\rho_3 - e_2 \rho_1)s) - \left(e_2 + \frac{e_2 \beta}{1 + h_2 \beta \tilde{x}}\right) \tilde{x}}{\left(\frac{e_2 \alpha}{1 + h_1 \alpha \tilde{x}} - c_2\right)} \quad \text{dan} \quad \tilde{z} = \frac{(e_1(1 - m) + u + (\rho_2 - e_1 \rho_1)s) - \left(e_1 + \frac{e_1 \alpha}{1 + h_1 \alpha \tilde{x}}\right) \tilde{x}}{\left(\frac{e_1 \beta}{1 + h_2 \beta \tilde{x}} - c_1\right)}$$

Kestabilan titik-titik ekuilibrium diselidiki dari hasil linierisasi di sekitar titik ekuilibriumnya dan disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2. 1. Jika $\rho_1 s + m > 1$, maka titik $TE_1 = (0, 0, 0, v, s)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

2. Jika $e_1 \alpha (1 - m - \rho_1 s) < (u + \rho_2 s)[1 + h_1 \alpha (1 - m - \rho_1 s)]$, $e_2 \beta (1 - m - \rho_1 s) < (w + \rho_3 s)[1 + h_2 \beta (1 - m - \rho_1 s)]$

dan $\rho_1 s + m < 1$, dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_2 = (1 - m - \rho_1 s, 0, 0, v, s)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

3. Jika $-(h_{11} + h_{22}) > 0$, $(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) > 0$, dan $h_{33} < 0$, dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_3 = \left(\bar{x}, \frac{(1-\bar{x}-\rho_1 s-m)(1+h_1 \alpha \bar{x})}{\alpha}, 0, v, s \right)$ bersifat stabil asimtotik lokal.
4. Jika $-(f_{11} + f_{33}) > 0$, $(f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}) > 0$, dan $f_{22} < 0$, dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_4 = \left(\hat{x}, 0, \frac{(1-\hat{x}-\rho_1 s-m)(1+h_2 \beta \hat{x})}{\beta}, v, s \right)$ bersifat stabil asimtotik lokal.
5. Jika $A > 0, B > 0, C > 0$ dan $AB - C > 0$ maka titik ekuilibrium $TE_5 = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, v, s)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Dengan $h_{11} = 1 - 2\bar{x} - \frac{(1-\bar{x}-\rho_1 s-m)}{(1+h_1 \alpha \bar{x})} - \rho_1 s - m$, $h_{22} = -u + \frac{e_1 \alpha \bar{x}}{1+h_1 \alpha \bar{x}} - 2e_1(1-\bar{x}-\rho_1 s-m)$, $h_{12} = -\frac{\alpha \bar{x}}{1+h_1 \alpha \bar{x}}$,
 $h_{21} = \frac{e_1(1-\bar{x}-\rho_1 s-m)}{(1+h_1 \alpha \bar{x})} + e_1 h_1(1-\bar{x}-\rho_1 s-m)^2$, $f_{11} = 1 - 2\hat{x} - \frac{(1-\hat{x}-\rho_1 s-m)}{(1+h_2 \beta \hat{x})} - \rho_1 s - m$, $f_{13} = -\frac{\beta \hat{x}}{1+h_2 \beta \hat{x}}$,
 $h_{33} = -w + \frac{e_2 \beta \bar{x}}{1+h_2 \beta \bar{x}} - \frac{c_2(1-\bar{x}-\rho_1 s-m)(1+h_1 \alpha \bar{x})}{\alpha} - \rho_3 s$, $f_{31} = \frac{e_2(1-\hat{x}-\rho_1 s-m)}{(1+h_2 \beta \hat{x})} + e_2 h_2(1-\hat{x}-\rho_1 s)^2$,
 $f_{33} = -w + \frac{e_2 \beta \hat{x}}{1+h_2 \beta \hat{x}} - 2e_2(1-\hat{x}-\rho_1 s-m) - \rho_3 s$, $f_{22} = -u + \frac{e_1 \alpha \hat{x}}{1+h_1 \alpha \hat{x}} - \frac{c_1(1-\hat{x}-\rho_1 s-m)(1+h_2 \beta \hat{x})}{\beta} - \rho_2 s$,

$$A = -(g_{11} + g_{22} + g_{33}), B = g_{22}g_{33} + g_{11}g_{22} + g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} - g_{32}g_{23} - g_{12}g_{21}, C = g_{13}g_{31}g_{22} + g_{32}g_{23}g_{11} + g_{12}g_{21}g_{33} - g_{12}g_{23}g_{31} - g_{13}g_{32}g_{21} - g_{11}g_{22}g_{33} \text{ dengan}$$

$$g_{11} = 1 - 2\tilde{x} - \left(\frac{\alpha \tilde{y}(1+h_1 \alpha \tilde{x}) - \alpha^2 h_1 \tilde{x}\tilde{y}}{(1+h_1 \alpha \tilde{x})^2} \right) - \left(\frac{\beta \tilde{z}(1+h_2 \beta \tilde{x}) - \beta^2 h_2 \tilde{x}\tilde{z}}{(1+h_2 \beta \tilde{x})^2} \right) - \rho_1 s - d$$
, $g_{33} = -w + \frac{e_2 \beta \tilde{x}}{1+h_2 \beta \tilde{x}} - \frac{2e_2 \beta \tilde{z}}{1+h_2 \beta \tilde{x}} - c_2 \tilde{y} - \rho_3 s$
 $g_{12} = -\frac{\alpha \tilde{x}}{1+h_1 \alpha \tilde{x}}$, $g_{13} = -\frac{\beta \tilde{x}}{1+h_2 \beta \tilde{x}}$, $g_{21} = \frac{e_1 \alpha \tilde{y}(1+h_1 \alpha \tilde{x}) - e_1 \alpha^2 h_1 \tilde{x}\tilde{y}}{(1+h_1 \alpha \tilde{x})^2} + \frac{e_1 \alpha^2 h_1 \tilde{y}^2}{(1+h_1 \alpha \tilde{x})^2}$,
 $g_{22} = -u + \frac{e_1 \alpha \tilde{x}}{1+h_1 \alpha \tilde{x}} - \frac{2e_1 \alpha \tilde{y}}{1+h_1 \alpha \tilde{x}} - c_1 \tilde{z} - \rho_2 s$, $g_{23} = -c_1 \tilde{y}$, $g_{31} = \frac{e_2 \beta \tilde{z}(1+h_2 \beta \tilde{x}) - e_2 \beta^2 h_2 \tilde{x}\tilde{z}}{(1+h_2 \beta \tilde{x})^2} + \frac{e_2 \beta^2 h_2 \tilde{z}^2}{(1+h_2 \beta \tilde{x})^2}$, $g_{32} = -c_2 \tilde{z}$,

C. Simulasi Numerik

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan *Software Maple*. Simulasi ini bertujuan untuk melengkapi hasil-hasil yang diperoleh secara analisis pada bab sebelumnya. Pada bagian ini dilakukan simulasi titik ekuilibrium untuk mengetahui perilaku dinamik penyelesaian (9) dalam jangka waktu yang lama di sekitar titik ekuilibrium tersebut. Dalam simulasi model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa di lingkungan beracun ini digunakan wereng batang padi coklat sebagai mangsa, sedangkan *Menochilus sexmaculatus* sebagai pemangsa pertama dan kepik mirid sebagai pemangsa kedua. Simulasi model matematika mangsa pemangsa ini pada (9) menggunakan nilai parameter berdasarkan [1] dan [3]. Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan adalah

$$m = 0,1; u = 0,55; w = 0,65; \rho_1 = 0,2; \rho_2 = 0,1; \rho_3 = 0,1; c_1 = 0,08; c_2 = 0,05; \alpha = 1,41; \beta = 1,5; \\ e_1 = 0,8; e_2 = 0,79; h_1 = 0,005; h_2 = 0,004; q = 0,25; b = 0,25; \mu = 0,5; \theta = 0,2; \gamma = 0,2;$$

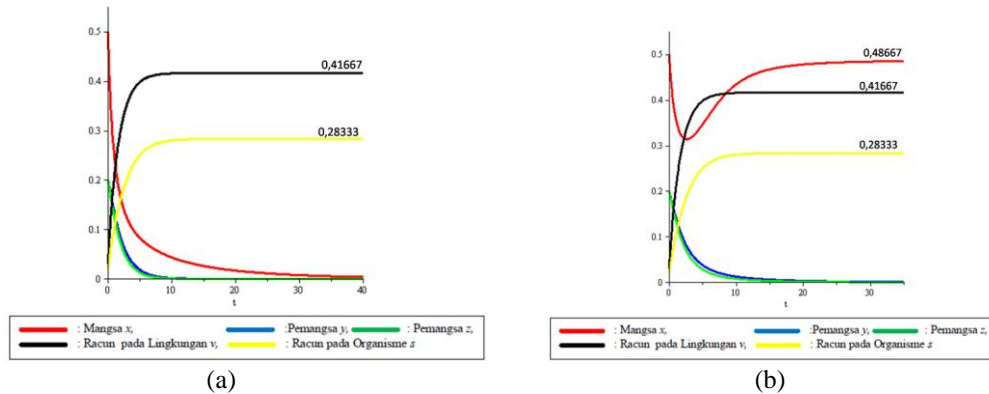
Dan diambil nilai awalnya sebagai berikut.

$$x(0) = 0,5; y(0) = 0,2; z(0) = 0,2; v(0) = 0,03; s(0) = 0,02;$$

Dengan bergantung pada nilai parameter e_1 dan e_2 yang berbeda, hal ini dapat ditunjukkan secara numerik eksistensi dan kepunahan dari salah satu pemangsa pada solusi non periodik (siklus kehidupan tidak akan berhenti). Parameter e_1 dan e_2 merupakan parameter yang sangat penting karena termuat dalam fungsi respon dan respon numerik yang membentuk komponen utama dari model mangsa pemangsa. Permainan respon fungsi merupakan peranan penting dalam interaksi diantara mangsa dan pemangsa. Ukuran parameter e_1 dan e_2 menyatakan efisiensi pengubahan konsumsi mangsa terhadap kelahiran pemangsa pertama dan kedua.

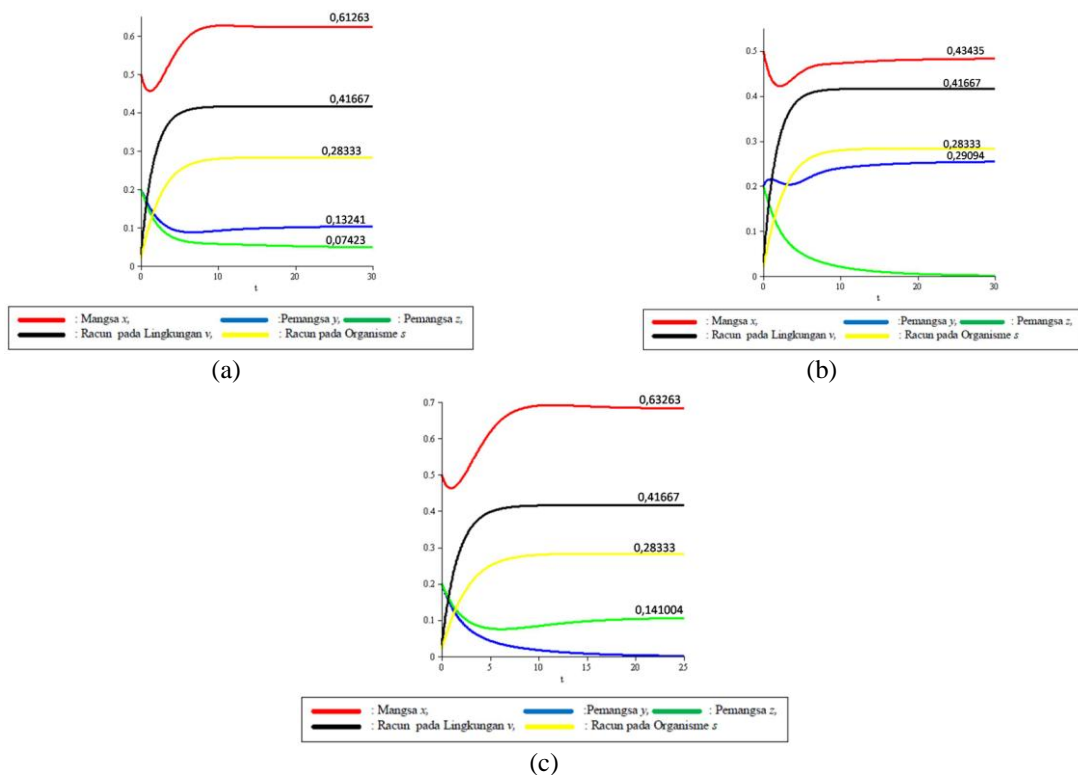
Ada beberapa simulasi numerik yang berbeda yang dilakukan, yaitu

1. Jika parameter $\rho_1 = 0,95$ atau $\rho_1 = 0,4$ dan parameter lain seperti yang telah ditetapkan.



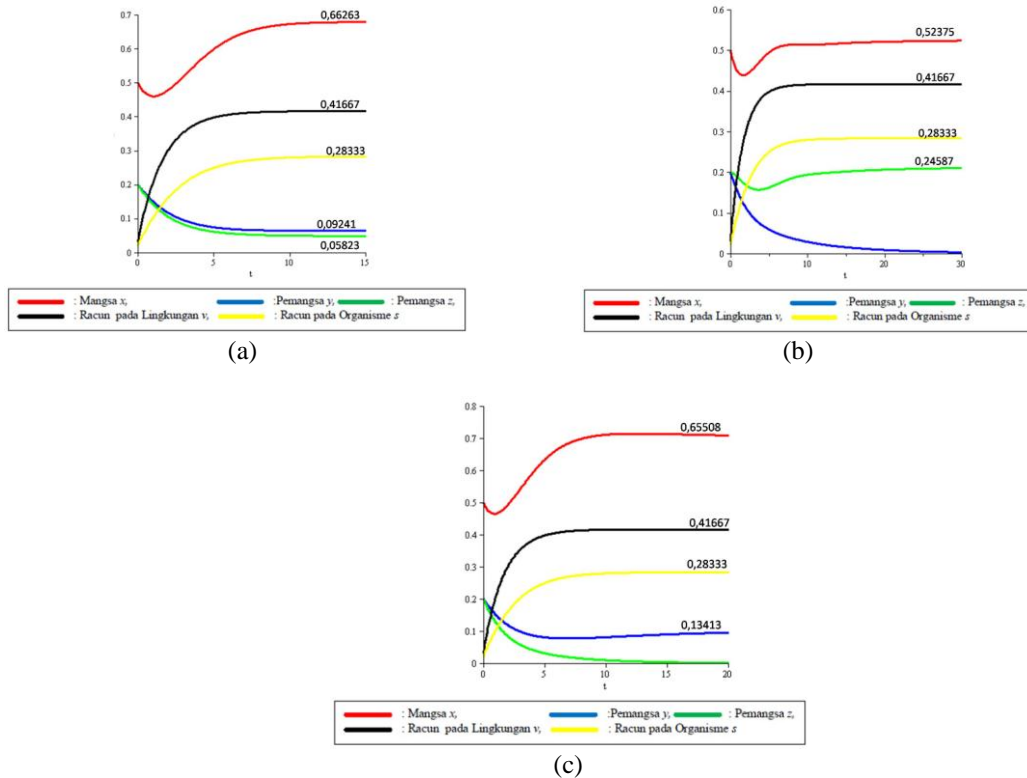
GAMBAR 1. Potret Fase (9) untuk (a) $\rho_1 = 0,95$ dan (b) $\rho_1 = 0,4$

2. Nilai e_2 ditetapkan 0,79, sedangkan nilai e_1 diubah-ubah untuk menunjukkan dampak dari efisiensi pengubahan mangsa terhadap kelahiran pemangsa pada keeksistensian dan kepunahan dari salah satu pemangsa.



GAMBAR 2. Potret Fase (9) untuk (a). $e_1 = 0,8$ dan $e_2 = 0,79$, (b). $e_1 = 1,8$ dan $e_2 = 0,79$, (c). $e_1 = 0,45$ dan $e_2 = 0,79$

3. Nilai e_1 ditetapkan 0,68, sedangkan nilai e_2 diubah-ubah untuk menunjukkan adanya kecocokan hasil pada keeksistensian dan kepunahan dari pemangsa bergantung pada keefesiensian dari konversi tersebut.



GAMBAR 3. Potret Fase (9) untuk (a). $e_1 = 0,68$ dan $e_2 = 0,72$ (b). $e_1 = 0,68$ dan $e_2 = 1,45$,
(c). $e_1 = 0,68$ dan $e_2 = 0,45$

III. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa dalam penelitian ini diberikan model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa di lingkungan beracun, dengan respon pemangsaannya menggunakan fungsi respon Holling tipe II dan laju pertumbuhan mangsa dan pemangsa memenuhi fungsi logistik. Sistem (9) memiliki lima titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium (9) dianalisis hanya kestabilan lokal.

Pada simulasi ini, ketiga populasi akan tetap bertahan hidup ketika nilai dari tingkat efisiensi pengubahan konsumsi mangsa terhadap kelahiran pemangsa pertama dan kedua saling berdekatan. Adanya racun juga mempengaruhi penurunan ketiga populasi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alebraheem, J dan Abu-Hasan, Y., "Persistence of predators in a two predators-one prey model with non periodic solution," *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, 2012, no. 19, 943 – 956.
- [2] Edwards, C. H., dan Penney, D. E., "*Elementary Differential equations (Sixth Edition)*," Pearson Education, Inc, New York, 2008.
- [3] Sinha, S., Isra, O. P., dan Dhar, J., "*Modelling a predator-prey system with infected prey in polluted environment*," Elsevier Inc, 2010, 1861-1872.